الموضوع السابع:

التمرين الأوّل:

1- نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(1;1;2)$ ، $B(-1;0;-2)$ ، $C(-1;0;-6)$

- بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2- لتكن S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تُحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

- بيّن أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R.

3- G نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ - عيّن إحداثيات النقطة G ثمّ تأكد أنّها تنتمي إلى S.

ب - أكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمسّ سطح الكرة S في النقطة G.

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z، التالية: $z^2+z+1=0$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B و M ذات اللاحقات:

$z_A=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A).

أ - أكتب z_A على الشكل الأسّي .

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[\left(z-z_A\right)^2\right]=\arg\left(z_A\right)-\arg\left(z_B\right)$.

3. أ - التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A.z+z_B\sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة .

ب - التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h .

جـ - نضع : $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عيّن طبيعة التحويل S، مبرزا عناصره المميزة، ثمّ تحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقاط C ، D و E ؛ حيث: $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

- بيّن أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

x	$f(x)$
0.20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I - f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ،

ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثمّ المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيّم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II- g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة **)**.

1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) **أ)** تحقّق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أنّ: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=\ln(1+e^{-x})-\frac{1}{1+e^{x}}$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g وشكل جدول تغيّراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع $t=\frac{1}{e^{x}}$).

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln(1+e^{x})$.

- استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكل جدول تغيّراتها.

- استنتج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

4- بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α .

5- ارسم (C_f) منحنى الدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6- ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^{x}\ln(1+e^{-x})-m=0$.

حل الموضوع السابع

التمرين الأوّل:

تبيين أنّ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ التي تحقق: $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم $\left(AB\right)$ نرمز له بالرمز $\left(P\right)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

$AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$ ومنه $AM^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

$BM=\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z+2)^2}$ ومنه $BM^2=(x+1)^2+y^2+(z+2)^2$

$MA^2-MB^2=1$ تكافئ $\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2\right]-\left[(x+1)^2+y^2+(z+2)^2\right]=1$

وتكافئ $-4x-2y-8z=0$ أي $-2x-y-4z=0$ وهي معادلة مستو ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}\left(-2;-1;-4\right)$ ومنه المستوي $\left(P\right)$ عمودي على المستقيم $\left(AB\right)$.

2– لتكن S مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

- إثبات أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R.

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ معناه $(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1-6=0$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ إذن S هي سطح كره مركزها $\omega(1;1;1)$

وطول نصف قطرها $R=3$.

3– G نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ ـ تعيين إحداثيات النقطة G ثمّ التأكد أنّها تنتمي إلى S.

G هي مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(C;1)\right\}$ وعليه $x_G=\dfrac{x_A-x_B+x_C}{1-1+1}=1$

$y_G=\dfrac{y_A-y_B+y_C}{1-1+1}=1$ ، $z_G=\dfrac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}=-2$ إذن $G\left(1;1;-2\right)$.

التأكد أنّ G تنتمي إلى S.

يمكن التأكد بسهولة أنّ G تنتمي إلى S بتعويض إحداثيات G في معادلة S نجد:

$(1-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2=9$ وهذا يعني أنّ G تنتمي إلى S.

ب ـ كتابة معادلة المستوي $\left(Q\right)$ الذي يمسّ سطح الكرة S في النقطة G .

المستوي $\left(Q\right)$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{\omega G}$ ويشمل النقطة G. ولدينا $\overrightarrow{\omega G}\left(0.0.-3\right)$.

ومنه معادلة $\left(Q\right)$ من الشكل $-3z+d=0$ وبما أنّ $\left(Q\right)$ يشمل G فإنّ $-3(-2)+d=0$ ومنه $d=-6$

وعليه $-3z-6=0$ ومنه $z+2=0$ هي معادلة للمستوي $\left(Q\right)$.

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z ، التالية : $z^2+z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=3i^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ و $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و M ذات اللاحقات:

$z_A=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

أ ـ كتابة z_A على الشكل الأسّي .

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب ـ تعيين مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[(z-z_A)^2\right] = \arg(z_A)-\arg(z_B)$.

$\arg\left[(z-z_A)^2\right] = \arg(z_A)-\arg(z_B)$ معناه $2\arg(z-z_A) = \arg(z_A)+\arg(z_A)$ ومعناه

$2\arg(z-z_A) = 2\arg(z_A)$ ومنه $\arg(z-z_A) = \arg(z_A)+k\pi$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (OA) باستثناء النقطة A.

3. أ ـ التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z' = z_A.z+z_B\sqrt{3}$

ـ تعيين طبيعة التحويل r و عناصره المميزة.

العبارة المركبة للتحويل r من الشكل $z' = az+b$ حيث $a = z_A$ و $b = \sqrt{3}z_B$.

$|a| = |z_A| = 1$ و $\arg(a) = \arg(z_A) = \frac{3\pi}{4}$ ومنه r دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة

$$z_\Omega = \frac{\sqrt{3}z_B}{1-z_A} = \frac{\frac{-\sqrt{3}+3i}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}} = \frac{i\left(3+i\sqrt{3}\right)}{3+i\sqrt{3}} = i$$

ب ـ التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z' = -2z+3i$

ـ تعيين نسبة ومركز التحاكي h .

نسبة التحاكي هي -2 ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{3i}{1-(-2)} = \frac{3i}{3i} = i = z_\Omega$ أي مركز التحاكي h هو Ω.

جـ ـ نضع : $S = h\circ r$. ($\circ$ يرمز إلى تركيب التحويلين r و h).

ـ تعيين طبيعة التحويل S، وعناصره المميزة.

يمكن اعتبار h تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته π ومركزه Ω

و r تشابه مباشر نسبته 1 وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه Ω إذن S هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين أي نسبته 2

وزاويته $\pi+\frac{3\pi}{4} = 2\pi+\frac{\pi}{3}$ أي زاويته $\frac{\pi}{3}$ و مركزه Ω .

التحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'-z_\Omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_\Omega)$ أي $z'-i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)$ ومنه $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E؛ حيث: $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$.

ـ إثبات أنّ النقط O، Ω و E في استقامية.

لدينا $S(D) = E$ ومنه $S\left[S(C)\right] = E$ أي $S\circ S(C) = E$ يكافئ $S\circ S\left[S(O)\right] = E$ يكافئ $S\circ S\circ S(O) = E$

نستنتج أنّ E هي صورة O بالتحويل $S\circ S\circ S$ ولدينا $S\circ S\circ S$ تشابه مباشر زاويته $3\times\frac{\pi}{3}$ أي زاويته π

ومركزه Ω ومنه $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega E}\right) = \pi$ وهذا يعني أنّ النقط O، Ω و E في استقامية.

aziz_mus1@hotmail.fr

طريقة 2:

لدينا $S(O)=C$ معناه $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega C}\right)=\frac{\pi}{3}$

$S(C)=D$ معناه $\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}\right)=\frac{\pi}{3}$

$S(D)=E$ معناه $\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\frac{\pi}{3}$

بالجمع طرفا إلى طرف نجد $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega C}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

ولدينا حسب علاقة شال $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega C}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega E}\right)$ ومنه $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\pi$

وهذا يعني أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

5. أ ـ تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ **مع** $\theta\in\mathbb{R}$ **.**

$z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z-i=2e^{i\theta}$ ومعناه $z-z_{\Omega}=2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z-z_{\Omega}|=2$ أي $\Omega M=2$

بالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 2 .

ب ـ تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي، $M'(z')$ صورتها بالتشابه S إذن $\Omega M'=2\Omega M$

إذا كانت M نقطة من (Γ) فإنّ $\Omega M=2$ ولدينا $\Omega M'=2\Omega M$ ومنه $\Omega M'=2\times 2$ أي $\Omega M'=4$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

طريقة 2:

لدينا $z=2e^{i\theta}+i$ ومنه $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\left(2e^{i\theta}+i\right)-i\right)+i$ ومنه $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2e^{i\theta}\right)+i$ أي $z'-i=4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

التمرين الثالث:

I- f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ **و** $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ **.**

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=1$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}=2$.

ولدينا $\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x}{x-1}=-\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$ ومنه $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}=-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$.

ولدينا $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=-\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب معادلته $x=1$.

2) حساب $f'(x)$. وتبيين أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

الدالة f عبارة عن عمليات على دوال قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ فهي تقبل الإشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

3) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α .

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2[$ و $0\in]-\infty;2[$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1[$.

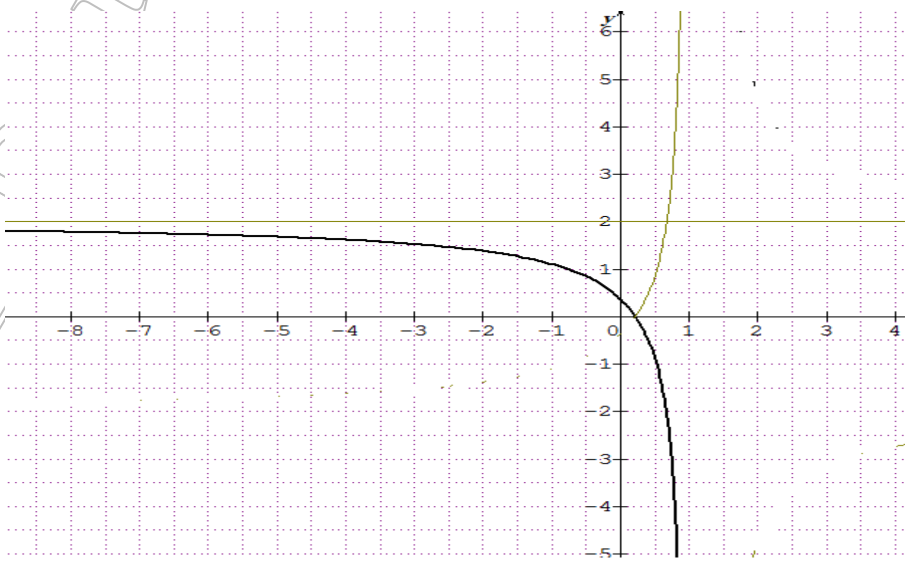
إيجاد حصرا للعدد α باستعمال جدول القيم أعلاه.

نلاحظ أنّ $f(0,21)\approx 0,016$ و $f(0,22)\approx -0,005$ إذن $f(0,21)\times f(0,22)<0$ ومنه $0,21<\alpha<0,22$

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

$$\begin{cases}|f(x)|=f(x);f(x)\geq 0\\|f(x)|=-f(x);f(x)\leq 0\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases}|f(x)|=f(x);x\in]-\infty;\alpha]\\|f(x)|=-f(x);x\in[\alpha;1[\end{cases}$$

إذن (C') ينطبق على (C) في المجال $]-\infty;\alpha]$ و (C') يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[\alpha;1[$.



5) تعيين بيانيا مجموعة قيّم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة من أجل قيّم m من المجال $\left]\frac{1}{e};2\right[$ (لاحظ أنّ $f(0)=\frac{1}{e}$)

II- g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) دراسة تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(2x-1)$ ؛ نضع $t=2x-1$ لما x يؤول إلى $-\infty$ فإنّ t يؤول $-\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(2x-1)=\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=2$

$\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{t\to1} f(t)=-\infty$

الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا: $g'(x)=2f'(2x-1)$

إذا كان $x<1$ فإنّ $2x-1<1$ ومنه $f'(2x-1)<0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$

يمكن إتباع طريقة إتجاه تغيّر مركب دالتين.

نعتبر الدالة $u:x\mapsto 2x-1$ المعرّفة على المجال $]-\infty;1[$ إذن $g(x)=f[u(x)]=(f\circ u)(x)$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} u(x);\lim\limits_{x\to1} u(x)\right[=]-\infty;1[$ والدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة g .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$2 \searrow -\infty$

2) أ) التحقّق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ تبيين أنّ: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha+1-1)=f(\alpha)=0$$

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha+1-1)=2f'(\alpha)$$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

$y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ج) التحقّق من أنّ: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، **معادلة للمستقيم** (T).

لدينا $f(\alpha)=0$ يكافئ $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}+e^{\frac{1}{\alpha-1}}=0$ أي $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه $2f'(\alpha)=\dfrac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)=\dfrac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)=\dfrac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(\dfrac{-1}{\alpha-1}\right)=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}$

إذن معادلة المستقيم (T) هي: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x+\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$

2- دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2}=\frac{-1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2}=\frac{-1-e^{x}+e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2}=\frac{-1}{\left(1+e^{x}\right)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدّالة g.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

3- استنتاج إشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

نضع $t=\dfrac{1}{e^{x}}$ عندئذ $e^{x}=\dfrac{1}{t}$ إذا كان x يئول إلى $+\infty$ فإنّ t يئول إلى 0.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{x}\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

2- تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(1+e^{x}\right)$ **.**

لدينا $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)=e^{x}\ln\left(e^{-x}\left(e^{x}+1\right)\right)=e^{x}\left[-x+\ln\left(e^{x}+1\right)\right]=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)$

ـ استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{x}+e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

3- دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f .

$$f'(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^{x}=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\frac{1}{1+e^{-x}}=g(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

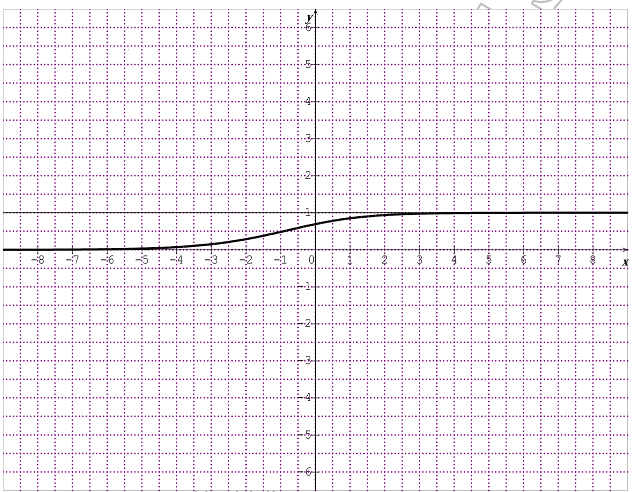
ـ استنتاج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا $f\left(\left]-\infty;+\infty\right[\right)=\left]1;2\right[$

4- تبيين أنّ المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ **تقبل حلا وحيدا α .**

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]1;2\right[$ و $\frac{1}{2}\in\left]1;2\right[$ إذن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α.

5- رسم $\left(C_f\right)$



6- المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-m=0$ **.**

$e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-m=0$ تكافئ $e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)=m$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m\le 0$ أو $m\ge 1$ فإنّ المعادلة لا تقبل أي حل.

إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.